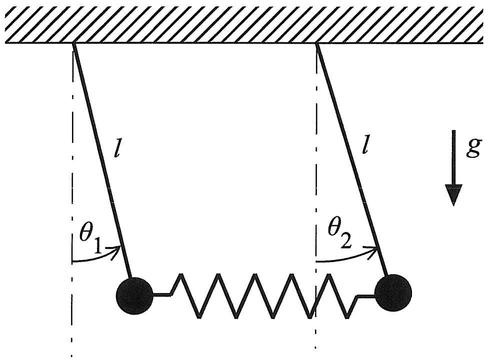
Tentamen
Mechanica & Relativiteit 2
12 april 2012, 9:00–12:00u

Opgave 1 Twee identieke mathematische slingers (massa m, lengte l) zijn elkaar verbonden door een veer met stijfheid k. De positie van de masss's wordt aangegeven door middel van de hoeken θ_1 respectievelijk θ_2, gemeten vanaf de verticale evenwichtstand waarbij de veer niet is uitgerekt. We bestuderen de gekoppelde trillingen die dit systeem in aanwezigheid van zwaartekracht (versnelling g) kan uitvoeren bij kleine uitwijkingen $\theta_1, \theta_2 << 1$.



a. Stel de Lagrangiaan $L(\dot{\theta}_1, \theta_1, \dot{\theta}_2, \theta_2) = T - V$ op voor kleine uitwijkingen en laat hierbij zien dat het gedeelte van de potentiële energie dat is opgeslagen in de veer kan worden geschreven als

$$V_{\text{veer}} \approx \frac{1}{2} k l^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 \,.$$

b. Leidt de bewegingsvergelijkingen af, schrijf deze in de vorm

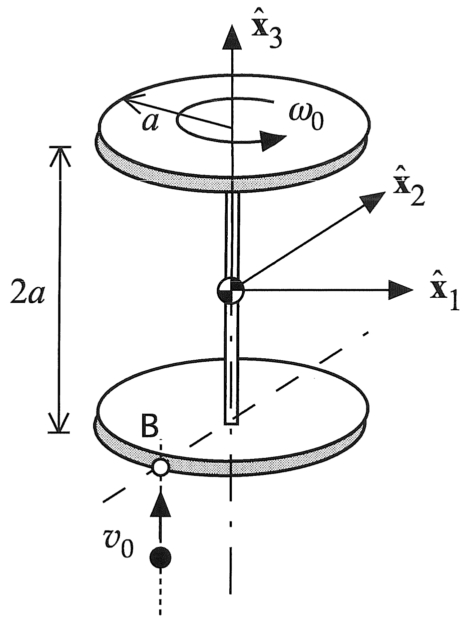
$$M \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en geef de massa- en stijfheidsmatrices M en C.

c. Bereken de eigenfrequenties van dit systeem

d. Bepaal de bijbehorende trillingsvormen en geef de interpretatie ervan weer in een duidelijke schets.

Opgave 2 Een sateliet met massa m is mechanisch gezien op te vatten als twee identieke schijven met straal a. De schijven worden door een massaloze staaf op onderlinge afstand $2a$ gehouden. De sateliet draait vrij rond in de ruimte met een hoeksnelheid ω_0 om zijn lengte-as.
Op een zeker moment slaat een meteoriet met snelheid v_0 in op de sateliet ter plaatse van punt B op afstand a van de meteoriet-as (zie figuur). Deze volkomen *niet*-elastische botsing resulteert in een precessiebeweging van de sateliet, maar de massa van de meteoriet, m_0, is zo klein dat mag worden aangenomen dat deze het massatraagheidsmoment niet beïnvloed. Voor de beschrijving van de beweging maken we gebruik van een stelsel basisvectoren dat aan het zwaartepunt van de sateliet is bevestigd, zo dat $\hat{\mathbf{x}}_3$ samenvalt met de initiële rotatie-as, $\hat{\mathbf{x}}_2$ in de richting tegenover het punt van inslag wijst, en $\hat{\mathbf{x}}_1$ een rechtsdraaiend systeem completeert.



a. Beargumenteer waarom de $\hat{\mathbf{x}}_i$ ($i = 1, 2.3$) hoofdassen zijn, en toon, gebruikmaken van de traagheidsmomenten van een schijf, aan dat de hoofdtraagheidsmomenten van de sateliet gegeven zijn door

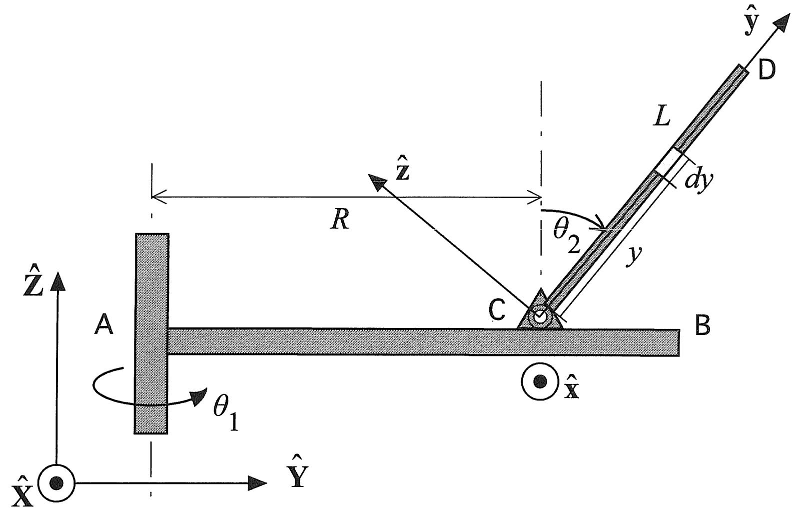
$$I_1 = I_2 = \frac{5}{4}ma^2\,, \quad I_3 = \frac{1}{2}ma^2\,.$$

Gebruik in het vervolg de afkorting $I \equiv I_1 = I_2$.

b. De spinvector vóór de botsing is $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{x}}_3$. Bereken de spinvector na de botsing.

c. Bepaal de oriëntatie van de precessie-as van de beweging ten opzichte van de sateliet en geef dit weer in een duidelijke schets.

Opgave 3 Een arm AB draait met een hoeksnelheid $\dot{\theta}_1$ om een verticale as die parallel is aan de Z-as van een vast assenstelsel. Op een afstand R van de as bevindt zich een horizontaal scharnier waar omheen een homogene staaf CD met massa m en lengte L kan draaien. Een met deze staaf meebewegend assenstelsel heeft een x-as die parallel is aan het scharnier en een y-as die parallel is aan CD. De rotatie van de arm AB om de Z-as wordt gemeten met de hoek θ_1 ten opzichte van de Y-as, en die van de staaf CD met de hoek θ_2 ten opzichte van de Z-as (de tekening hieronder is een projectie voor $\theta_1 = 0$). Het doel van deze opgave is de kinetische energie van deze staaf te bepalen.



a. De spinvector op een willekeurig punt langs de staaf wordt gegeven door de componenten

$$\omega_x = -\dot{\theta}_2\,, \quad \omega_y = \dot{\theta}_1 \cos\theta_2\,, \quad \omega_z = \dot{\theta}_1 \sin\theta_2\,,$$

ten opzichte van de basisvectoren $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ van het meedraaiende stelsel.

Bepaal nu de componenten van de spinvector ten opzichte van de stilstaande basis $(\hat{\mathbf{X}}_\mathrm{I}, \hat{\mathbf{Y}}_\mathrm{I}, \hat{\mathbf{Z}}_\mathrm{I})$.

b. Bereken de kinetische energie van de translatiebeweging van het massamiddelpunt van de staaf CD.

c. Bereken de kinetische energie van de rotatie om het massamiddelpunt (maak hierbij gebruik van het feit dat de hoofdassen van het traagheidsmoment samenvallen met de (x, y, z)-assen).

d. Controleer de totale kinetische energie volgens de som van de antwoorden op (b) en (c) door directe integratie van de kinetische energie van oneindig kleine stukjes met massa $dm = (m/L)dy$ zoals in bovenstaande figuur aangegeven. Bereken daartoe eerst de componenten van de snelheidsvector op een punt y langs de staaf in termen van θ_1 en θ_2.

Opgave	aantal punten
1	3+2+3+2=10
2	2+4+2=8
3	2+3+2+4=11

Tentamencijfer = (totaal punten + 3) /3.2